

УДК 519.958

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА (ПЛАСТИНЫ) СО СВОБОДНЫМИ ГРЯНЯМИ

В.Н. Паймушин, Т.В. Полякова

Аннотация

Для тонкой прямоугольной пластины со свободными гранями с использованием тригонометрических базисных функций найдены точные аналитические решения задачи о свободных колебаниях, сформулированной на основе трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных путем введения предположения о равенстве нулю нормального напряжения в направлении толщины пластины.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, свободные грани, свободные колебания, упрощенная пространственная задача, тригонометрические базисные функции, метод Бубнова, частота колебаний, форма колебаний, бессдвиговая форма, изгибно-сдвиговая форма, чисто сдвиговая форма.

Введение

Сформулирована пространственная задача о свободных колебаниях тонкого ортотропного прямоугольного параллелепипеда (пластины) со свободными гранями, основанная на использовании трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных за счет введения допущения о равенстве нулю нормального напряжения в поперечном направлении (толщины пластины). Используя во всех трех направлениях тригонометрические функции в качестве базисных и удовлетворяя всем граничным условиям сформулированной задачи на основе метода Бубнова, мы нашли ее аналитические решения, дополняющие решениям неупрощенных задач о плоских и пространственных бессдвиговых формах колебаний, которые были построены ранее указанным методом. Установлено, что некоторые из найденных решений соответствуют не равенству нулю нормальных напряжений, а отсутствию перемещения в направлении толщины. Соответствующие им частоты колебаний весьма близки к аналогичным частотам, которые ранее были найдены из уравнений плоской задачи теории упругости и имеют место для пластины лишь при выполнении определенных условий, связывающих между собой геометрические размеры пластины, коэффициенты Пуассона материала и волновые числа. Установлено, что некоторые найденные решения, которым соответствуют ненулевые поперечные сдвиговые деформации, эквивалентны изгибно-сдвиговым и чисто сдвиговым формам колебаний, определяемым из уравнений уточненной теории пластин типа Тимошенко.

1. Постановка задачи

Рассмотрим, как и в [1], деформируемое упругое тело в виде прямоугольного параллелепипеда (пластины) со сторонами a , b , h , выполненного из ортотропного

материала с осями ортотропии, совпадающими с осями x, y, z прямоугольной декартовой системы координат. Полагаем грани $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ и $z = 0, z = h$ свободными, а один из размеров намного меньше остальных, то есть выполняются условия $a \gg h, b \gg h$. Принимая для напряжений и перемещений стандартные обозначения, уравнения пространственной задачи о свободных колебаниях и соотношения обобщенного закона Гука запишем в виде (ρ – плотность материала, ω – круговая частота свободных колебаний)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \Omega^2 u &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \Omega^2 v = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \Omega^2 w &= \rho \omega^2 w, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= g_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + g_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + g_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = G_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ g_{11} &= E_1 (1 - \nu_{23} \nu_{32}) / \Delta, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$g_{12} = g_{21} = E_2 (\nu_{12} - \nu_{13} \nu_{32}) / \Delta = E_1 (\nu_{21} - \nu_{23} \nu_{31}) / \Delta; \quad \overrightarrow{x, y, z}; \quad \overleftarrow{1, 2, 3},$$

где $\Delta = 1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31}$, $E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$, $E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}$, $E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31}$, $\nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} = \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}$, а E_α , $G_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha\beta}$ – упругие характеристики ортотропного материала.

Так как на гранях $z = 0, z = h$ имеют место статические граничные условия

$$\tau_{xz}(0, h) = 0, \quad \tau_{yz}(0, h) = 0, \quad \sigma_z(0, h) = 0, \quad (1.3)$$

то после интегрирования по z уравнения (1.1) в силу (1.3) представимы в виде

$$\begin{aligned} \int_0^h \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \Omega^2 u \right) dz &= 0, \quad \int_0^h \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \Omega^2 v \right) dx = 0, \\ \int_0^h \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \Omega^2 w \right) dz &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если далее принять условие $\sigma_z \equiv 0$ для всего рассматриваемого тела (условие плоского напряженного состояния), то при использовании соотношений упругости (1.2), преобразованных с учетом условия $\sigma_z \equiv 0$ к виду

$$\sigma_x = E_1^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad \sigma_y = E_2^* \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad \tau_{xy} = G_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

и введении известных дополнительных предположений $\sigma_x = \sigma_x(x, y), \dots, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ из системы уравнений (1.4) выделяются уравнения плоской задачи теории упругости в перемещениях

$$\begin{aligned} E_1^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + G_{12} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \Omega^2 u &= 0, \\ E_2^* \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + G_{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \Omega^2 v &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $E_1^* = E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$, $E_2^* = E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$.

При граничных условиях

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{x=0, a} &= 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=0, a} = 0, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=0, b} &= 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{y=0, b} = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

в работе [2] найдены три точных решения уравнений (1.5). В соответствии с первым из них частоты свободных колебаний определяются по формуле

$$\Omega^2 = \frac{E_1^* \lambda_n^4 + E_2^* \lambda_k^4 - 2 \nu_{12} E_2^* \lambda_k^2 \lambda_n^2}{\lambda_n^2 + \lambda_k^2}, \quad \lambda_n = \frac{n \pi}{a}, \quad \lambda_k = \frac{k \pi}{b}, \quad n, k = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

в которой параметры волнообразования λ_n, λ_k ничем не ограничены, а два других решения доставляют формулы

$$\Omega^2 = E_1 \lambda_n^2 / (1 + \nu_{12}), \quad (1.8)$$

$$\Omega^2 = E_2 \lambda_k^2 / (1 + \nu_{21}), \quad (1.9)$$

причем формуле (1.8) соответствует решение при $\lambda_k^2 = \nu_{12} \lambda_n^2$, а формуле (1.9) – решение при $\lambda_n^2 = \nu_{21} \lambda_k^2$.

Не комментируя пока указанные выше решения двумерной задачи (1.5), (1.6), сформулируем пространственную задачу вида

$$\begin{aligned} f_1 &= E_1^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + G_{12} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + G_{13} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \Omega^2 u = 0, \\ f_2 &= G_{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + E_2^* \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + G_{23} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \Omega^2 v = 0, \\ f_3 &= G_{13} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + G_{23} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \Omega^2 w = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_{21} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{x=0, a} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=0, a} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=0, a} = 0, \quad (1.11)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=0, b} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{y=0, b} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big|_{y=0, b} = 0, \quad (1.12)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \nu_{12} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{y=0, b} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big|_{y=0, b} = 0, \quad (1.13)$$

которая следует из неупрощенной пространственной задачи, точные решения которой найдены в [1] путем введения единственного предположения $\sigma_z \equiv 0$ для всего объема тела.

Сформулированная задача (1.10)–(1.13) имеет два точных решения

$$\Omega_{(x)}^2 = E_1^* \lambda_n^2, \quad u = U(x) = U_n \cos \lambda_n x, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (1.14)$$

$$\Omega_{(y)}^2 = E_2^* \lambda_k^2, \quad u = 0, \quad v = V(y) = V_k \cos \lambda_k y, \quad w = 0, \quad (1.15)$$

которые соответствуют предельным случаям $b/a \rightarrow \infty$, $a/b \rightarrow \infty$, но не удовлетворяют введенному исходному предположению

$$\tilde{g}_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{g}_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + \tilde{g}_{33} \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.16)$$

где $\tilde{g}_{13} = \nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}$, $\tilde{g}_{23} = \nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}$, $\tilde{g}_{33} = 1 - \nu_{12} \nu_{21}$.

В рамках плоской постановки задачи равенство (1.16) служит для определения функции w после определения функций u , v из решения задачи (1.5), (1.6).

2. Построение решения задачи (1.10)–(1.13) с использованием тригонометрических базисных функций

Если перемещения u , v , w , следуя [1, 2], представить в виде

$$\begin{aligned} u &= u_m \sin \lambda_m z + \tilde{u}_m \cos \lambda_m z, & v &= v_m \sin \lambda_m z + \tilde{v}_m \cos \lambda_m z, \\ w &= w_m \sin \lambda_m z + \tilde{w}_m \cos \lambda_m z, & \lambda_m &= m \pi / h, \end{aligned} \quad (2.1)$$

то после удовлетворения граничным условиям (1.13) и использования представлений

$$\begin{aligned} w_m &= w_{mk} \sin \lambda_k y + \tilde{w}_{mk} \cos \lambda_k y, & \tilde{w}_m &= w_{mk} \sin \lambda_k y + \tilde{w}_{mk} \cos \lambda_k y, \\ u_m &= u_{mk} \sin \lambda_k y + \tilde{u}_{mk} \cos \lambda_k y, & \tilde{v}_m &= v_{mk} \sin \lambda_k y + \tilde{v}_{mk} \cos \lambda_k y \end{aligned}$$

можно получить:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\lambda_k} (w_{mk}^x \sin \lambda_k y + \tilde{w}_{mk}^x \cos \lambda_k y) \sin \lambda_m z + (u_{mk} \sin \lambda_k y + \tilde{u}_{mk} \cos \lambda_k y) \cos \lambda_m z, \\ v &= -\frac{\lambda_k}{\lambda_m} (w_{mk} \cos \lambda_k y + \tilde{w}_{mk} \sin \lambda_k y) \sin \lambda_m z + (v_{mk} \sin \lambda_k y + \tilde{v}_{mk} \cos \lambda_k y) \cos \lambda_m z, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$w = (W_{mk} \sin \lambda_k y + \tilde{W}_{mk} \cos \lambda_k y) \sin \lambda_m z + (w_{mk} \sin \lambda_k y + \tilde{w}_{mk} \cos \lambda_k y) \cos \lambda_m z,$$

где $w_{mk}^x = \partial w_{mk} / \partial x$, $\tilde{w}_{mk}^x = \partial \tilde{w}_{mk} / \partial x$.

Потребовав теперь в выражениях (2.2) удовлетворения граничным условиям (1.12), получим зависимости

$$W_{mk} = \frac{\lambda_m}{\lambda_k} \tilde{v}_{mk}, \quad u_{mk} = -\frac{1}{\lambda_k} \tilde{v}_{mk}^x, \quad v_{mk} = -\frac{\nu_{12}}{\lambda_k} \tilde{u}_{mk}^x,$$

а при их использовании, а также представлений

$$\begin{aligned} &\{ \tilde{u}_{mk}, u_{mk}, w_{mk}, \tilde{w}_{mk}, v_{mk}, \tilde{v}_{mk}, \tilde{W}_{mk}, W_{mk} \}^T = \\ &= \{ u_{mkn}, U_{mkn}, w_{mkn}, \psi_{mkn}, v_{mkn}, V_{mkn}, W_{mk}, \varphi_{mkn} \}^T \sin \lambda_k x + \\ &+ \{ \tilde{u}_{mkn}, \tilde{U}_{mkn}, \tilde{w}_{mkn}, \tilde{\psi}_{mkn}, \tilde{v}_{mkn}, \tilde{V}_{mkn}, \tilde{W}_{mkn}, \tilde{\varphi}_{mkn} \}^T \cos \lambda_n x, \end{aligned}$$

вместо (2.2) будем иметь:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\lambda_m} [\lambda_n (w_{mkn} \cos \lambda_n x - \tilde{w}_{mkn} \sin \lambda_n x) \sin \lambda_k y + \\ &+ \lambda_n (\psi_{mkn} \cos \lambda_n x - \tilde{\psi}_{mkn} \sin \lambda_n x) \cos \lambda_k y] \sin \lambda_m z + \\ &+ [(U_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{U}_{mkn} \cos \lambda_n x) \sin \lambda_k y + \\ &+ (u_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{u}_{mkn} \cos \lambda_n x) \cos \lambda_k y] \cos \lambda_m z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
v = -\frac{\lambda_k}{\lambda_m} [& (w_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{w}_{mkn} \cos \lambda_n x) \cos \lambda_k y - \\
& - (\psi_{mkn} \cos \lambda_n x + \tilde{\psi}_{mkn} \sin \lambda_n x) \cos \lambda_k y] \sin \lambda_m z + \\
& + [(v_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{v}_{mkn} \cos \lambda_n x) \sin \lambda_k y + \\
& + (V_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{V}_{mkn} \cos \lambda_n x) \cos \lambda_k y] \cos \lambda_m z, \quad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w = [& (\varphi_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{\varphi}_{mkn} \cos \lambda_n x) \sin \lambda_k y + \\
& + (W_{mkn} \sin \lambda_n x - \tilde{W}_{mkn} \cos \lambda_n x) \cos \lambda_k y] \sin \lambda_m z + \\
& + [(w_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{w}_{mkn} \cos \lambda_n x) \sin \lambda_k y + \\
& + (\psi_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{\psi}_{mkn} \cos \lambda_n x) \cos \lambda_k y] \cos \lambda_m z, \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Если подчинить полученные функции (2.3)–(2.5) всем граничным условиям (1.11)–(1.13), то приходим к зависимостям

$$\begin{aligned}
U_{mkn} &= \frac{\nu_{21} \lambda_k}{\lambda_n} \tilde{V}_{mkn}, \quad \tilde{v}_{mkn} = -\frac{\lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} u_{mkn}, \quad \tilde{u}_{mkn} = \frac{\lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n} v_{mkn}, \\
V_{mkn} &= \frac{\lambda_k^2}{\nu_{12} \lambda_n^2} v_{mkn}, \quad \tilde{U}_{mkn} = -\frac{\lambda_n}{\lambda_k} V_{mkn} = -\frac{\lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n} v_{mkn}, \quad (2.6) \\
\varphi_{mkn} &= -\frac{\lambda_m \lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n^2} v_{mkn}, \quad W_{mkn} = -\frac{\lambda_k \lambda_m}{\nu_{12} \lambda_n^2} v_{mkn}, \quad \tilde{\varphi}_{mkn} = \frac{\lambda_m}{\lambda_k} \tilde{V}_{mkn},
\end{aligned}$$

а также к условиям

$$w_{mkn} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n \lambda_k / \lambda_m = 0; \quad (2.7)$$

$$\tilde{w}_{mkn} \neq 0 \quad \text{при:} \quad 1) \lambda_n^2 + \nu_{21} \lambda_k^2 = 0; \quad 2) \lambda_n \lambda_k / \lambda_m = 0; \quad (2.8)$$

$$\psi_{mkn} \neq 0 \quad \text{при:} \quad 1) \lambda_k^2 + \nu_{12} \lambda_n^2 = 0; \quad 2) \lambda_n \lambda_k / \lambda_m = 0; \quad (2.9)$$

$$\tilde{\psi}_{mkn} \neq 0 \quad \text{при:} \quad 1) \lambda_n^2 + \nu_{21} \lambda_k^2 = 0; \quad 2) \lambda_k^2 + \nu_{12} \lambda_n^2 = 0; \quad (2.10)$$

$$\tilde{V}_{mkn} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n^2 - \nu_{21} \lambda_k^2 = 0; \quad (2.11)$$

$$v_{mkn} \neq 0 \quad \text{при:} \quad 1) \lambda_k^2 - \nu_{12} \lambda_n^2 = 0; \quad 2) \lambda_k^2 \lambda_m / \nu_{12} \lambda_n^2 = 0; \quad (2.12)$$

$$u_{mkn} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n = 0; \quad (2.13)$$

причем на неизвестную \tilde{W}_{mkn} , входящую в (2.3)–(2.5), никакие условия не накладываются.

Подставив зависимости (2.6) в (2.3)–(2.5), для u , v , w получим окончательные выражения вида

$$\begin{aligned}
u = -\frac{\lambda_n}{\lambda_m} [& (w_{mkn} \cos \lambda_n x - \tilde{w}_{mkn} \sin \lambda_n x) \sin \lambda_k y + \\
& + (\psi_{mkn} \cos \lambda_n x - \tilde{\psi}_{mkn} \sin \lambda_n x) \cos \lambda_k y] \sin \lambda_m z + \\
& + [\left(\frac{\nu_{21} \lambda_k}{\lambda_n} \tilde{V}_{mkn} \sin \lambda_n x - \frac{\lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n} v_{mkn} \cos \lambda_n x \right) \sin \lambda_k y + \\
& + \left(u_{mkn} \sin \lambda_n x + \frac{\lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n} v_{mkn} \cos \lambda_n x \right) \cos \lambda_k y] \cos \lambda_m z, \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = & -\frac{\lambda_k}{\lambda_m} \left[(w_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{w}_{mkn} \cos \lambda_n x) \cos \lambda_k y - \right. \\
& - (\psi_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{\psi}_{mkn} \cos \lambda_n x) \sin \lambda_k y \left. \right] \sin \lambda_m z + \\
& + \left[\left(v_{mkn} \sin \lambda_n x - \frac{\lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} u_{mkn} \cos \lambda_n x \right) \sin \lambda_k y + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12} \lambda_n^2} v_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{V}_{mkn} \cos \lambda_n x \right) \cos \lambda_k y \right] \cos \lambda_m z, \quad (2.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w = & \left[\left(-\frac{\lambda_m \lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n^2} v_{mkn} \sin \lambda_n x + \frac{\lambda_m}{\lambda_k} \tilde{V}_{mkn} \cos \lambda_n x \right) \sin \lambda_k y + \right. \\
& + \left(\frac{\lambda_m \lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n^2} v_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{W}_{mkn} \cos \lambda_n x \right) \cos \lambda_k y \left. \right] \sin \lambda_m z + \\
& + \left[(w_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{w}_{mkn} \cos \lambda_n x) \sin \lambda_k y + \right. \\
& + (\psi_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{\psi}_{mkn} \cos \lambda_n x) \cos \lambda_k y \left. \right] \cos \lambda_m z, \quad (2.16)
\end{aligned}$$

при использовании которых для сдвиговых деформаций устанавливаются формулы

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = & -2 \frac{\lambda_k \lambda_n}{\lambda_m} \left[(w_{mkn} \cos \lambda_n x - \tilde{w}_{mkn} \sin \lambda_n x) \cos \lambda_k y - \right. \\
& - (\psi_{mkn} \cos \lambda_n x - \tilde{\psi}_{mkn} \sin \lambda_n x) \sin \lambda_k y \left. \right] \sin \lambda_m z + \\
& + \frac{\nu_{21} \lambda_k^2 - \lambda_n^2}{\lambda_n} \tilde{V}_{mkn} \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z + \\
& + \frac{\lambda_n^2 - \nu_{21} \lambda_k^2}{\nu_{21} \lambda_k} u_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z + \\
& + \frac{\nu_{12} \lambda_n^2 - \lambda_k^2}{\nu_{12} \lambda_n} v_{mkn} \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z, \quad (2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = & -\frac{(\nu_{21} \lambda_k^2 - \lambda_n^2) \lambda_m}{\lambda_n \lambda_k} \tilde{V}_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z - \\
& - (u_{mkn} \lambda_m + \lambda_n \tilde{W}_{mkn}) \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z, \quad (2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = & -\frac{(\nu_{12} \lambda_n^2 + \lambda_k^2) \lambda_m}{\nu_{12} \lambda_n^2} v_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z + \\
& + \left(\frac{\lambda_m \lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} u_{mkn} - \lambda_k \tilde{W}_{mkn} \right) \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z - \\
& - 2 \frac{\lambda_m \lambda_k^2}{\nu_{12} \lambda_n^2} v_{mkn} \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Из выражений (2.17)–(2.19) видно, что в силу условий, содержащихся в (2.7)–(2.13), всегда имеет место равенство $\gamma_{xy} = 0$. В то же время в (2.17)–(2.19) содержатся и решения, отвечающие ненулевым сдвиговым деформациям γ_{xz} и γ_{yz} .

3. Уравнения метода Бубнова и их решения

В соответствии с методологией, изложенной в работах [1, 2], в рассматриваемом случае в силу структуры построенного общего решения (2.14)–(2.16) необходимо составить уравнения метода Бубнова следующих видов

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^h \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_m} f_1 \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z - \frac{\lambda_k}{\lambda_m} f_2 \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z + \right. \\ \left. + f_3 \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z \right) dx dy dz = 0 \quad \text{при } \delta w_{mkn} \neq 0, \quad (3.1)$$

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^h \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_m} f_1 \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z - \frac{\lambda_k}{\lambda_m} f_2 \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z + \right. \\ \left. + f_3 \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z \right) dx dy dz = 0 \quad \text{при } \delta \tilde{w}_{mkn} \neq 0, \quad (3.2)$$

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^h \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_m} f_1 \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z + \frac{\lambda_k}{\lambda_m} f_2 \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z + \right. \\ \left. + f_3 \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z \right) dx dy dz = 0 \quad \text{при } \delta \psi_{mkn} \neq 0, \quad (3.3)$$

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^h \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_m} f_1 \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z + \frac{\lambda_k}{\lambda_m} f_2 \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z + \right. \\ \left. + f_3 \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z \right) dx dy dz = 0 \quad \text{при } \delta \tilde{\psi}_{mkn} \neq 0, \quad (3.4)$$

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^h \left(\frac{\nu_{21} \lambda_k}{\lambda_n} f_1 \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z + f_2 \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_m}{\lambda_k} f_3 \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z \right) dx dy dz = 0 \quad \text{при } \delta \tilde{V}_{mkn} \neq 0, \quad (3.5)$$

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^h \left(f_1 \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} f_2 \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z \right) dx dy dz = 0 \quad \text{при } \delta u_{mkn} \neq 0, \quad (3.6)$$

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^h f_3 \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z dx dy dz = 0 \quad \text{при } \delta \tilde{W}_{mkn} \neq 0, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \int_0^b \int_0^h \left[\frac{\lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n} f_1 \cos \lambda_n x (-\sin \lambda_k y + \cos \lambda_k y) \cos \lambda_m z + \right. \\
& \quad + f_2 \sin \lambda_n x \left(\sin \lambda_k y + \frac{\lambda_k^2}{\nu_{12} \lambda_n^2} \cos \lambda_k y \right) \cos \lambda_m z + \\
& \quad \left. + f_3 \frac{\lambda_m \lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n^2} \sin \lambda_n x (-\sin \lambda_k y + \cos \lambda_k y) \sin \lambda_m z \right] dx dy dz = 0 \quad \text{при } \delta v_{mkn} \neq 0, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f_1 = & \left[E_1^* \frac{\lambda_n}{\lambda_m} (\lambda_n^2 + \nu_{21} \lambda_k^2) + 2 G_{12} \frac{\lambda_k^2 \lambda_n}{\lambda_m} - \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \Omega^2 \right] (w_{mkn} \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z - \\
& - \tilde{w}_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z + \psi_{mkn} \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z - \\
& - \tilde{\psi}_{mkn} \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z) + \left[E_1^* \frac{\lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n} (\lambda_n^2 - \nu_{21} \lambda_k^2) - \right. \\
& - \frac{\lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n} \Omega^2 \left. \right] v_{mkn} \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z + \left[-E_1 \frac{\lambda_n \lambda_k}{\nu_{12}} + G_{12} \frac{\lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n} (-\lambda_k^2 + \right. \\
& + \nu_{12} \lambda_n^2) + \frac{\lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n} \Omega^2 \left. \right] v_{mkn} \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z + \left[-G_{12} \frac{\lambda_k}{\lambda_n} (\nu_{21} \lambda_k^2 - \lambda_n^2) - \right. \\
& - G_{12} \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n \lambda_k} (\nu_{21} \lambda_k^2 + \lambda_m^2) + \frac{\nu_{21} \lambda_k}{\lambda_n} \Omega^2 \left. \right] \tilde{v}_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z + \\
& + \left\{ \left[\frac{G_{12}}{\nu_{21}} (-\nu_{21} \lambda_k^2 + \lambda_n^2) - G_{13} \lambda_m^2 + \Omega^2 \right] u_{mkn} - \right. \\
& \left. - G_{13} \lambda_n \lambda_m \tilde{w}_{mkn} \right\} \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & \left[E_2^* \frac{\lambda_k}{\lambda_m} (\lambda_k^2 + \nu_{12} \lambda_n^2) + 2 G_{12} \frac{\lambda_k \lambda_n^2}{\lambda_m} - \frac{\lambda_k}{\lambda_m} \Omega^2 \right] (w_{mkn} \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z + \\
& + \tilde{w}_{mkn} \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z - \psi_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z - \\
& - \tilde{\psi}_{mkn} \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z) + \left[-E_2^* \lambda_k^2 + G_{12} (\nu_{21} \lambda_k^2 - \lambda_n^2) + \right. \\
& + \Omega^2 \left. \right] \tilde{v}_{mkn} \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z + \left[E_2^* \frac{\lambda_k^2}{\nu_{12} \lambda_n} (\nu_{12} \lambda_n^2 - \lambda_k^2) - \right. \\
& - 2 G_{23} \frac{\lambda_m^2 \lambda_k^2}{\nu_{12} \lambda_n^2} + \frac{\lambda_k^2}{\nu_{12} \lambda_n^2} \Omega^2 \left. \right] v_{mkn} \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z + \\
& + \left[-\frac{G_{12}}{\nu_{12}} (-\lambda_k^2 + \nu_{21} \lambda_n^2) - \frac{\lambda_m^2 G_{23}}{\nu_{12} \lambda_n^2} (\nu_{12} \lambda_n^2 + \lambda_k^2) + \Omega^2 \right] v_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z + \\
& + \left\{ \left[E_2^* \frac{\lambda_k \lambda_n}{\nu_{21}} + \frac{G_{12} \lambda_n}{\nu_{21} \lambda_n} (-\nu_{21} \lambda_k^2 + \lambda_n^2) + G_{23} \frac{\lambda_m^2 \lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} - \frac{\lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} \Omega^2 \right] u_{mkn} - \right. \\
& \left. - G_{23} \lambda_k \lambda_m \tilde{w}_{mkn} \right\} \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 = & \left[-G_{13} \frac{\lambda_m}{\lambda_k} (\nu_{21} \lambda_k^2 + \lambda_n^2) + \frac{\lambda_m}{\lambda_k} \Omega^2 \right] \tilde{V}_{mkn} \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z + \\
& + \left[-G_{23} \frac{\lambda_m \lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n^2} (\nu_{12} \lambda_n^2 + \lambda_k^2) + \frac{\lambda_k \lambda_m}{\nu_{12} \lambda_n^2} \Omega^2 \right] v_{mkn} \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z + \\
& + \left[2 G_{23} \frac{\lambda_m \lambda_k^2}{\nu_{12} \lambda_n^2} - \frac{\lambda_m \lambda_k}{\nu_{12} \lambda_n^2} \Omega^2 \right] v_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z + \\
& + \left[\left(-G_{13} \lambda_m \lambda_n + G_{23} \frac{\lambda_m \lambda_n}{\nu_{21}} \right) u_{mkn} + (-\lambda_n^2 G_{13} - \lambda_k^2 G_{23} + \right. \\
& \left. + \Omega^2) \tilde{W}_{mkn} \right] \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z + \Omega^2 \left[(w_{mkn} \sin \lambda_n x + \right. \\
& \left. + \tilde{w}_{mkn} \cos \lambda_n x) \sin \lambda_k y + (\psi_{mkn} \sin \lambda_n x + \tilde{\psi}_{mkn} \cos \lambda_n x) \cos \lambda_k y \right] \cos \lambda_m z.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Кроме уравнений (3.1)–(3.8) в каждой точке рассматриваемого тела построенные решения (2.3)–(2.5) в силу принятого предположения $\sigma_z \equiv 0$ должны удовлетворять равенству (1.16).

Подставив теперь (3.9)–(3.11) в (3.1), при условии $w_{mkn} \neq 0$ получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda_n}{\lambda_m} \left[E_1^* \frac{\lambda_n}{\lambda_m} (\lambda_n^2 + \nu_{21} \lambda_k^2) + 2 G_{12} \frac{\lambda_k^2 \lambda_n}{\lambda_m} - \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \Omega^2 \right] - \\
& - \frac{\lambda_k}{\lambda_m} \left[E_2^* \frac{\lambda_k}{\lambda_m} (\lambda_k^2 + \nu_{12} \lambda_n^2) + 2 G_{12} \frac{\lambda_n^2 \lambda_k}{\lambda_m} - \frac{\lambda_k}{\lambda_m} \Omega^2 \right] + \Omega^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

которому отвечает частное решение

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{\lambda_n}{\lambda_m} w_{mkn} \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z, \\
v &= -\frac{\lambda_k}{\lambda_m} w_{mkn} \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z, \quad w = w_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

В соответствии с (2.1) на уравнение (3.12) и решение (3.13) должны быть наложены два варианта условий. В первом случае, когда $\lambda_n = 0$, $\lambda_k \neq 0$, из уравнения (3.12) следует формула

$$\Omega_{(1)}^2 = \frac{E_2^* \lambda_k^4}{\lambda_k^2 + \lambda_m^2}, \tag{3.14}$$

но при этом, как следует из (3.13), имеем равенства $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Следовательно, данное решение не является действительным для пластины конечных размеров.

Во втором случае, когда $\lambda_k = 0$, $\lambda_n \neq 0$, из (3.12) получаем формулу

$$\Omega_{(2)}^2 = \frac{E_1^* \lambda_n^4}{\lambda_n^2 + \lambda_m^2}, \tag{3.15}$$

и при этом, как следует из (3.13), также имеют место равенства $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$.

Следует отметить, что условие $\lambda_n \lambda_k / \lambda_m = 0$, накладываемое на решение (3.13), а также и на другие решения, содержащиеся в (2.14)–(2.16), вытекает из граничных условий $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, формулируемых для граней $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$,

$y = b$, формулы (3.14) и (3.15) при $\lambda_m = 0$ являются частотами колебаний бесконечно длинной (решение (1.15)) и бесконечно широкой (решение (1.14)) пластин в соответствующих осевых направлениях, которые получены в результате решения соответствующих одномерных задач.

Для всех других решений, в которых неизвестными являются обобщенные перемещения \tilde{w}_{mkn} , ψ_{mkn} , $\tilde{\psi}_{mkn}$, как следует из (2.9)–(2.11), одновременно должны быть выполнены условия $\lambda_n = 0$ и $\lambda_k = 0$. При подстановке выражений (3.9)–(3.11) в уравнения (3.2)–(3.4) можно убедиться, что в силу этих условий все решения, следующие из уравнений (3.2)–(3.4), являются тривиальными ($\Omega^2 = 0$) и недействительными для пластины конечных размеров.

Обратимся к уравнению (3.5). При подстановке в него выражений (3.9)–(3.11) при условии $\tilde{V}_{mkn} \neq 0$ приходим к характеристическому уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n} \left[-G_{12} \frac{\lambda_k}{\lambda_n} (\nu_{21}\lambda_k^2 - \lambda_n^2) - G_{13} \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n\lambda_k} (\nu_{21}\lambda_k^2 + \lambda_n^2) + \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n} \Omega^2 \right] - E_2\lambda_k^2 + \\ & + G_{12}(\nu_{21}\lambda_k^2 - \lambda_n^2) + \frac{\lambda_m}{\lambda_k} \left[-G_{13} \frac{\lambda_m}{\lambda_k} (\nu_{12}\lambda_k^2 + \lambda_n^2) + \frac{\lambda_m}{\lambda_k} \Omega^2 \right] + \Omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

которому соответствует решение

$$\begin{aligned} u &= \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n} \tilde{V}_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z, \\ v &= \tilde{V}_{mkn} \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z, \quad w = \frac{\lambda_m}{\lambda_k} \tilde{V}_{mkn} \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Так как на данное решение и уравнение (3.16) согласно (2.11) должно быть наложено условие $\lambda_n^2 = \nu_{21}\lambda_k^2$, то при его выполнении из (3.16) следует формула

$$\Omega_{(4)}^2 = \frac{E_2\lambda_k^4 + 4\nu_{21}G_{13}\lambda_m^2\lambda_k^2}{\lambda_m^2 + (1 + \nu_{21})\lambda_k^2}, \quad (3.18)$$

практически полностью совпадающая по структуре с аналогичной формулой работы [3], соответствующей изгибно-сдвиговым ФСК.

Подчинив далее решение (3.17) равенству (1.19), с учетом наложенного на него условия $\lambda_n^2 = \nu_{21}\lambda_k^2$ получим равенство $\lambda_m^2 = \nu_{23}\lambda_k^2$. При его использовании формула (3.18) преобразуется к виду

$$\Omega_{(4)}^2 = \frac{E_2 + 4\nu_{21}\nu_{23}G_{13}}{1 + \nu_{21} + \nu_{23}} \lambda_k^2. \quad (3.19)$$

Этим частотам соответствует пространственная форма свободных колебаний, описываемая функциями

$$\begin{aligned} u &= \frac{\nu_{21}}{\sqrt{\nu_{21}}} \tilde{V}_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z, \\ v &= \tilde{V}_{mkn} \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z, \\ w &= \sqrt{\nu_{23}} \tilde{V}_{mkn} \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z. \end{aligned} \quad (3.20)$$

являющимися симметричными относительно срединной плоскости пластины $z = h/2$, при использовании которых для определения поперечных сдвиговых деформаций можно получить выражения

$$\gamma_{xz} = -2\nu_{21} \sqrt{\frac{\nu_{23}}{\nu_{21}}} \lambda_k \tilde{V}_{mkn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y \sin \lambda_m z, \quad \gamma_{yz} \equiv 0.$$

Принципиально важно отметить, что формула (3.19) является аналогом формулы $\Omega_{(y)}^2 = E_2^* \lambda_k^2$ из (1.15), но, в отличие от нее, имеет место только при выполнении условий $\lambda_n^2 = \nu_{21} \lambda_k^2$, $\lambda_m^2 = \nu_{23} \lambda_k^2$, а решение (3.20), в отличие от решения $u = U_n \cos \lambda_n x$, $v = w = 0$, удовлетворяет равенству (1.19). Указанные условия представимы в виде

$$\begin{aligned} \frac{nb}{kh} &= \sqrt{\nu_{21}}, \\ \frac{mb}{kh} &= \sqrt{\nu_{23}}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

при выполнении которых для пластины даже из изотропного материала, когда $G_{\alpha\beta} = G = E/[2(1+\nu)]$, имеет место неравенство $\Omega_{(4)} < \Omega_{(y)}$, так как

$$\frac{E_2^* + 4\nu_{21}\nu_{23}G_{13}}{1 + \nu_{21} + \nu_{23}} = \frac{1 + \nu + 2\nu^2}{1 + 3\nu + 2\nu^2} < 1.$$

В частности, при $\nu = 0.3 - \Omega_{(4)}^2 \approx 0.71 \Omega_{(y)}^2$, то есть когда известное классическое решение, не удовлетворяющее исходному предположению $\sigma_z \equiv 0$, почти в 1.2 раза завышает частоту колебаний (3.19), имеющую место при выполнении условий (3.21).

Из уравнений (3.6), (3.7) при подстановке в них выражений (3.9)–(3.11) следует система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &\left[\frac{G_{12}}{\nu_{21}} (-\nu_{21} \lambda_k^2 + \lambda_n^2) - G_{13} \lambda_m^2 + \Omega^2 \right] u_{mkn} - G_{13} \lambda_n \lambda_m \widetilde{W}_{mkn} - \\ &- \frac{\lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} \left\{ \left[E_2^* \frac{\lambda_k \lambda_n}{\nu_{21}} + G_{12} \frac{\lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} (-\nu_{21} \lambda_k^2 + \lambda_n^2) + G_{23} \frac{\lambda_m^2 \lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} \Omega^2 \right] u_{mkn} - G_{23} \lambda_k \lambda_m \widetilde{W}_{mkn} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\left[-G_{13} \lambda_m \lambda_n + \frac{\lambda_m \lambda_n}{\nu_{21}} \right] u_{mkn} + (-\lambda_n^2 G_{13} - \lambda_k^2 G_{23} + \Omega^2) \widetilde{W}_{mkn} = 0, \quad (3.23)$$

которая соответствует решению

$$\begin{aligned} u &= u_{mkn} \sin \lambda_n x \cos \lambda_k y \cos \lambda_m z, \\ v &= -\frac{\lambda_n}{\nu_{21} \lambda_k} u_{mkn} \cos \lambda_n x \sin \lambda_k y \cos \lambda_m z, \\ w &= \widetilde{W}_{mkn} \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Так как в $u_{mkn} \neq 0$ соответствии с условием (2.13) только при $\lambda_n = 0$, то из выражений (3.24) следуют равенства $u = 0$, $v = 0$. Последние будут выполнены и при условии $u_{mkn} \equiv 0$, что приводит вместо системы уравнений (3.22), (3.23) к одному уравнению

$$(-\lambda_n^2 G_{13} - \lambda_k^2 G_{23} + \Omega^2) \widetilde{W}_{mkn} = 0 \quad (3.25)$$

при произвольных n и k . В силу того, что на \widetilde{W}_{mkn} не наложены какие-либо условия, из (3.25) следует формула

$$\Omega_{(5)}^2 = G_{13} \lambda_n^2 + G_{23} \lambda_k^2. \quad (3.26)$$

Обратимся, наконец, к последнему уравнению (3.8). Подставив в него выражения (3.9)–(3.11), при условии $v_{mkn} \neq 0$ получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n} \left[-\frac{E_1^*\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n} (\lambda_n^2 - \nu_{21}\lambda_k^2) + \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n} \Omega^2 - E_1 \frac{\lambda_n\lambda_k}{\nu_{12}} + G_{12} \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n} (-\lambda_k^2 + \nu_{12}\lambda_n^2) \right] - \\ & - \frac{G_{12}}{\nu_{12}} (-\lambda_k^2 + \nu_{12}\lambda_n^2) - \frac{\lambda_m^2}{\nu_{12}\lambda_n^2} G_{23} (\nu_{12}\lambda_n^2 + \lambda_k^2) + \Omega^2 + \\ & + \frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\lambda_n^2} \left[E_2^* \frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\lambda_n^2} (\nu_{12}\lambda_n^2 - \lambda_k^2) - 2G_{23} \frac{\lambda_m^2\lambda_k^2}{\nu_{21}\lambda_n^2} + \frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\lambda_n^2} \Omega^2 \right] - \\ & - \frac{\lambda_m\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n^2} \left[2G_{23} \frac{\lambda_m\lambda_k^3}{\nu_{12}\lambda_n^2} + G_{23} \frac{\lambda_m\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n^2} (\nu_{12}\lambda_n^2 + \lambda_k^2) - 2 \frac{\lambda_m\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n^2} \Omega^2 \right] = 0, \quad (3.27) \end{aligned}$$

соответствующее решению

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n} v_{mkn} \cos \lambda_n x (\sin \lambda_k y - \cos \lambda_k y) \cos \lambda_m z, \\ v &= v_{mkn} \sin \lambda_n x \left(\sin \lambda_k y - \frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\lambda_n^2} \cos \lambda_k y \right) \cos \lambda_m z, \\ w &= -\frac{\lambda_m\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n^2} v_{mkn} \sin \lambda_n x (\sin \lambda_k y - \cos \lambda_k y) \sin \lambda_m z. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Если наложить на уравнение (3.27) и решение (3.28) первое условие из (2.12), то из (3.27) можно получить формулу

$$\Omega_{(6)}^2 = \frac{E_1^*\lambda_n^4 + 4G_{23}\nu_{12}\lambda_m^2\lambda_n^2}{\lambda_m^2 + (1 + \nu_{12})\lambda_n^2}, \quad (3.29)$$

которая по структуре совпадает с формулой (3.19) и по теории пластин типа Тимошенко соответствует изгибно-сдвиговым ФСК [3]. Так как в рассматриваемом случае $\lambda_k^2/(\nu_{12}\lambda_n^2) = 1$, то второе условие из (2.12) принимает вид $\lambda_m = 0$. При его использовании из (3.29) следует формула

$$\Omega_{(7)}^2 = \frac{E_1\lambda_n^2}{1 + \nu_{12}}, \quad (3.30)$$

а решение (3.28) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{\nu_{12}}}{\nu_{12}} v_{0kn} \cos \lambda_n x \left[\sin(\lambda_n \sqrt{\nu_{12}} y) - \cos(\lambda_n \sqrt{\nu_{12}} y) \right], \\ v &= v_{0kn} \sin \lambda_n x \left[\sin(\lambda_n \sqrt{\nu_{12}} y) + \cos(\lambda_n \sqrt{\nu_{12}} y) \right], \quad w \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Но полученное решение (3.31) противоречит принятому исходному предположению $\sigma_z = 0$, выраженному равенством (1.16). Поэтому оно в рассматриваемом случае должно быть заменено на равенство $\varepsilon_z = 0$ ($w = 0$), в силу которого первые два соотношения (1.2) необходимо записать в виде

$$\sigma_x = g_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{\nu}_{21} \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad \sigma_y = g_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \tilde{\nu}_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

где

$$\tilde{\nu}_{21} = \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{13}}{1 - \nu_{23}\nu_{32}}, \quad \tilde{\nu}_{12} = \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{1 - \nu_{31}\nu_{13}}.$$

При этом в уравнениях (1.10) величины E_1^* , E_2^* заменяются на величины g_{11} , g_{22} , а величины ν_{12} , ν_{21} — на $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\nu}_{21}$ соответственно. Такую же замену необходимо осуществить в решении (3.28) и в уравнении (3.27), а вместо накладываемого на них условия $\lambda_k^2 = \nu_{12} \lambda_n^2$ приходим к условию $\lambda_k^2 = \tilde{\nu}_{12} \lambda_n^2$. Можно показать, что при его использовании с учетом (1.2) имеет место преобразование вида

$$g_{11} (1 - \tilde{\nu}_{12} \tilde{\nu}_{21}) = \frac{E_1}{1 - \nu_{13} \nu_{31}} = \tilde{E}_1, \quad \tilde{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{13} \nu_{31}}.$$

В силу указанных замен и преобразований в рассматриваемом случае приходим к формуле

$$\Omega_{(6)}^2 = \frac{\tilde{E}_1 \lambda_n^4 + 4 G_{23} \tilde{\nu}_{12} \lambda_m^2 \lambda_n^2}{\lambda_m^2 + (1 + \tilde{\nu}_{12}) \lambda_n^2}, \quad (3.32)$$

заменяющей формулу (3.29), которая с учетом второго условия принимает вид

$$\Omega_{(7)}^2 = \frac{\tilde{E}_1 \lambda_n^2}{1 + \tilde{\nu}_{12}} = \frac{E_1 \lambda_n^2}{(1 + \tilde{\nu}_{12})(1 + \nu_{13} \nu_{31})}. \quad (3.33)$$

Частотам колебаний, определяемым по полученной формуле (3.32), в рассматриваемом случае будет соответствовать решение (3.31), в котором величина ν_{12} должна быть заменена на величину $\tilde{\nu}_{12}$.

4. Анализ построенных решений

Установленная формула (3.30) полностью совпадает с формулой (1.9), полученной в работе [2] в рамках плоской постановки задачи теории упругости. Однако этой формуле соответствуют разные формы свободных колебаний: функции (3.31) в рамках рассматриваемой пространственной постановки задачи и функции вида

$$u = u_{0nk} \cos \lambda_k y \cos \lambda_n x,$$

$$v = \frac{\lambda_k}{\lambda_n} v_{0nk} \sin \lambda_k y \sin \lambda_n x,$$

$$\lambda_k^2 = \nu_{12} \lambda_n^2,$$

при использовании которых перемещение w определяется из равенства (1.16), в рамках плоской постановки задачи. Если в формуле (3.18) принять $\lambda_m = 0$, то в дополнение к (3.30) приходим к формуле

$$\Omega^2 = \frac{E_2^* \lambda_k^2}{1 + \nu_{21}}, \quad (4.1)$$

которой соответствуют формы колебаний, описываемые функциями

$$u = \frac{\nu_{21} \lambda_k}{\lambda_n} \tilde{V}_{0kn} \sin \lambda_n x \sin \lambda_k y,$$

$$v = \tilde{V}_{0kn} \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y, \quad (4.2)$$

$$w = 0, \quad \lambda_n^2 = \nu_{21} \lambda_k^2.$$

Формула (4.1), соответствующие ей функции u , v и условие, задаваемые (4.2), полностью совпадают с формулой (1.9), соответствующими ей функциями u , v и условием $\lambda_n^2 = \nu_{21} \lambda_k^2$ работы [2]. Однако между этими решениями имеется

и различие — $w = 0$ в решении (4.2), а в рамках плоской постановки задачи w определяется из равенства (1.16). Аналогичная картина имеет место и при сравнении формулы (1.8), соответствующей плоской постановке задачи [2], с формулой (3.30), полученной на основе пространственной постановки задачи. В связи с этим дополняющей к (3.33) вместо (4.1) является формула

$$\Omega^2 = \frac{\tilde{E}_2 \lambda_k^2}{1 + \tilde{\nu}_{21}} = \frac{E_2 \lambda_k^2}{(1 + \tilde{\nu}_{21})(1 - \nu_{23} \nu_{32})}.$$

которая соответствует решению (3.31) при $\lambda_n^2 = \tilde{\nu}_{21} \lambda_k^2$ и $w = 0$.

Следует также заметить, что задача (1.10)–(1.13) и построенное для нее решение (2.14)–(2.16), в отличие от [2], не приводит к формуле (1.7) и соответствующим ей функциям вида

$$\begin{aligned} u &= u_{nk} \sin \lambda_k y \cos \lambda_n x, \\ v &= -\frac{\lambda_k}{\lambda_n} u_{nk} \cos \lambda_k y \sin \lambda_n x, \end{aligned}$$

на которые не накладываются никакие ограничения. Формулы вида (1.7) были получены и в работе [1], но исходя из неупрощенных уравнений пространственной задачи теории упругости. Однако им соответствуют только тривиальные решения $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$.

Описанные выше ФСК, как и все установленные в работе [1], являются безсдвиговыми в отличие от решения (3.20) и соответствующей ей формулы (3.19), к которым приводит рассматриваемая в настоящей работе упрощенная пространственная постановка задачи. Ее решением, построенным на основе тригонометрических базисных функций, описываются также чисто поперечно-сдвиговые ФСК, которым для определения Ω^2 соответствует формула (3.26). Она полностью совпадает с аналогичной формулой, установленной в работе [3] на основе решения уравнений теории пластин типа Тимошенко, что является характеристикой степени их точности для описания поперечно-сдвиговых и поперечно-изгибно-сдвиговых форм колебаний. Но в рассматриваемом случае ей соответствует решение

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = \tilde{W}_{mnk} \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y \sin \lambda_m z$$

задачи (1.10)–(1.13), которое противоречит следующему из равенства (1.16) условию $\partial w / \partial z = 0$. Следовательно, колебания с частотами (3.26) являются недействительными, а решение вида

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = W_0 \cos \lambda_n x \cos \lambda_k y$$

и формула (3.26) получаются из уравнений теории Тимошенко в виду положенных в их основу приближенных представлений для перемещений u , v , w , не удовлетворяющих граничным условиям (1.13).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00323-а) и по федеральной целевой программе «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (мероприятие 1.1 «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров», № 2009-1.1-112-049-024, гос. контракт № 02.740.11.0205 от 7 июля 2009 г.).

Summary

V.N. Paimushin, T.V. Polyakova. Analytical Solutions for the Free Vibration Problem of a Thin Rectangular Parallelepiped (Plate) with Free Edges.

Using trigonometric basis functions we found exact analytical solutions for the free vibration problem of a thin rectangular plate with free edges. The problem was formulated by the three-dimensional equations of the theory of elasticity, which were simplified by supposing that the normal stress through the thickness of the plate is equal to zero.

Key words: rectangular plate, free edges, free vibrations, simplified spatial problem, trigonometric basis functions, Bubnov method, vibration frequency, vibration mode, without shear mode, flexural-shear mode, purely shear mode.

Литература

1. *Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Точные аналитические решения трехмерной задачи о свободных колебаниях ортотропного прямоугольного параллелепипеда со свободными гранями // Механика композитных материалов и конструкций. – 2006. – Т. 12, № 3. – С. 317–336.
2. *Паймушин В.Н.* Точные и приближенные решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной пластины со свободными краями, основанные на тригонометрических базисных функциях // Механика композитных материалов. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 461–488.
3. *Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Точные решения задач об изгибных и поперечно-сдвиговых формах потери устойчивости и свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины с незакрепленными краями // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 1. – С. 181–198.

Поступила в редакцию
19.06.10

Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева.

E-mail: lukankin@ds.m.kstu-kai.ru

Полякова Татьяна Витальевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-технического центра проблем динамики и прочности при Казанском государственном техническом университете им. А.Н. Туполева.

E-mail: ds.m@ds.m.kstu-kai.ru